Colle du 03/06 - Sujet 1
Représentation matricielle et variables aléatoires

Question de cours. Démontrer la formule de la matrice du vecteur image.

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathscr{B} = \left((X-1)^2, (X+1)^2, X^2-1\right)$ et $\mathscr{C} = ((1,2,3), (1,2,0), (1,0,0))$. On admet que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3\right)$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = A$.

1. Calculer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
2. Calculer l'image de $3X^2 - 2X - 1$ par u.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. Soit $\mathscr{B}' = \left(X^2-1, 4, 2X^2+2X+4\right)$. Calculer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(u)$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit de façon équiprobable un nombre m entre 1 et n. Puis une fois ce nombre m choisi, on tire un second nombre entre 1 et m. On note X le premier nombre obtenu et Y le second.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. Soit $j \in [\![1; n$. Exprimer $\mathbb{P}(Y = j)$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
3. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Colle du 03/06 - Sujet 2
Représentation matricielle et variables aléatoires

Question de cours. Démontrer la formule de la matrice de la composition.

Exercice 1. Un employé appelle n correspondants le jour 1. Chaque correspondant a une probabilité p de répondre. On note N_1 le nombre de correspondants ayant répondu. Le jour 2, l'employé rappelle les $n - N_1$ correspondants qui n'ont pas répondu. Ces derniers décrochent de façon indépendante avec la même probabilité. On note N_2 le nombre de correspondants ayant répondu le jour 2 et enfin on pose $N = N_1 + N_2$.

1. Déterminer la loi de N_1.
2. Déterminer la loi de N_2.
3. Calculer l'espérance et la variance de N_1 et N_2.

Exercice 2. Soient $E = \mathbb{R}^n$, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = \mathrm{Id}_E$. Posons $v = \mathrm{Id}_E + u + \cdots + u^{p-1}$.

1. Calculer $u \circ v$.
2. En déduire v^2.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont supplémentaires dans E.
4. Déterminer la matrice de v dans une base adaptée à cette supplémentarité.

Colle du 03/06 - Sujet 3
Représentation matricielle et variables aléatoires

Question de cours. La formule sur la fonction génératrice de la somme.

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$. Ces espaces sont-ils supplémentaires ?
2. Soit $U = 1 + X - X^2$. Montrer que $\mathscr{B} = (U, f(1), f(X))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On tire un nombre N de façon équiprobable entre 1 et n puis on lance N fois une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in]0;1[$. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ on note X_k la variable aléatoire valant 1 si la pièce retourne pile au k-ième lancer. On suppose les lancers indépendants. On note enfin $S_N = X_1 + \cdots + X_N$, la variable aléatoire retournant le nombre de piles obtenues à l'issue de l'expérience.

1. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Préciser les lois de N, X_k et de $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \mathbb{P}(S_N = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(S_N = 0) = \frac{1-p}{np}\left(1 - (1-p)^n\right).$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Sans calcul, justifier que

$$\sum_{i=1}^{k} i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} = kp.$$

4. En déduire $\mathbb{E}(S_N)$.